M.H. QOCAMANOV

GEODEZİYA ÖLÇMƏLƏRİNİN HESABLANMASI VƏ TARAZLAŞDIRILMASI

Ali məktəblər üçün dərslik

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirinin 21 fevral 2012-ci il tarixli 239 №-li əmri ilə təsdiq edilmişdir.

BAKI – 2014

Rəyçilər:

1. **R.M. Məmmədov,** AMEA-nın müxbir üzvü, texnika elmləri doktoru, professor, AMEA-nın akad. H.Əliyev adına Coğrafiya İnstitutunun Elmi İşlər üzrə müavini;
2. **F.Ə. İmanov,** coğrafiya elmləri doktoru, professor, BDU-nun Coğrafiya fakültəsinin dekanı;
3. **F.H. Rəhimov,** fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor, BDU-nun Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika kafedrası

Qocamanov M.H. Geodeziya ölçmələrinin hesablanması və tarazlaşdırılması. *Universiet tələbələri üçün dərslik.* Bakı: «Bakı Universiteti» nəşriyyatı, 2014, 280 səh.

Dərslikdə ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsi və ən kiçik kvadratlar metodu şərh edilir. Onun birinci hissəsində ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikadan məlumatlar verilir ki, bu da növbəti fəsillərdəki materialların öyrənilməsinə xidmət edir. Dərsliyin son fəslində müasir geodeziyanın bir sıra məsələlərinin tarazlaşdırılması ilə bağlı materiallar yer tutur. Ümumən dərslikdə əksər nəzəri mövzulara dair məsələ həlli nümunələri verilir.

Dərslik ilk növbədə universitetlərdə «Geodeziya və xəritəçilik mühəndisliyi» ixtisası üzrə təhsil alan tələbələr üçün nəzərdə tutulsa da, ondan müvafiq ixtisaslı magistrant, doktorant və geodeziya ölçmələri ilə məşğul olan mütəxəssislər də istifadə edə bilər.

$$Q-\frac{1802020000}{M-658(07)}-02-2014$$

GİRİŞ

Geodeziya ölçmələrini digər sahə ölçmələri kimi səhvsiz yerinə yetirmək təcrübi olaraq qeyri-mümkündür. Adətən, geodeziya ölçmələrinin dəqiqliyini yüksəltmək məqsədi ilə onları bir neçə dəfə təkrar ölçmələrlə həyata keçirirlər. Bu zaman kəmiyyətlər, eləcə də onların ölçmə nəticələri arasında mövcud olan qarşılıqlı riyazi əlaqə hesabına tarazlaşdırma məsələsi meydana çıxır. Tarazlaşdırmadan təyin edilən kəmiyyətlər üçün ən ehtimal olunan, eyni zamanda ən etibarlı (tarazlaşdırılmış) qiymətlər tapılır, həmçinin bu ehtimal qiymətlərə dəqiqliyin göstərilməsi imkanı yaranır.

Dərslik «Geodeziya ölçmələrinin hesablanması və tarazlaşdırılması» fənninin proqramına uyğun yazılmış və şərti olaraq iki hissəyə bölünür:

I. Ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsi.

II. Ən kiçik kvadratlar metodu.

Hər iki hissənin öyrənilməsi tələbələrdən «Ehtimal nəzəriyyəsi» və «Riyazi statistika» elmi sahələrindən müəyyən biliklərə malik olmalarını tələb edir. Lakin «Geodeziya və xəritəçilik mühəndisliyi» ixtisasında təhsil alan tələbələrə riyaziyyatın bu bölmələri ayrıca fənn kimi tədris edilmir, ali riyaziyyat kursu çərçivəsində səthi olaraq ümumi anlayışlar şəklində çatdırılır. Ona görə də təqdim edilən dərsliyin birinci, ikinci və üçüncü fəsillərində «Ehtimal nəzəriyyəsi» və «Riyazi statistika» kurslarından zəruri olan müvafiq teorem və qaydalar verilmiş, onların geodeziya hesablamalarında tətbiqi konkret məsələ həlləri ilə göstərilmişdir. Dərslikdəki mövzular şərh edilərkən ali riyaziyyat kursundan tələbələrə məlum olan bir sıra başqa riyazi aparatlardan da istifadə edilir. Dərslikdə geodeziya kursundan gətirilmiş anlayış və bəhslərlə bağlı isə düşünürük ki, birinci kursda artıq geodeziya fənnini keçmiş ikinci kurs tələbələri üçün bu istiqamətdə çətinliklər yaranmayacaqdır.

Dərsliyin dördüncü fəsli ölçmələr səhvləri nəzəriyyəsinə həsr edilmişdir. Burada ölçmə səhvləri, onların növləri, təsadüfi səhvlərin xassələri, ölçmə və ölçmə funksiyasının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi üsulları, bərabərdəqiqlikli ölçmələr sırasının riyazi hesablanması, ölçmə çəkisi anlayışı və ondan istifadə etməklə qeyri-bərabər dəqiqlikli ölçmələr sırasının tarazlaşdırılması yolları göstərilmiş və müvafiq məsələ həlləri nümayiş etdirilmişdir.

Dərsliyin ikinci hissəsi ən kiçik kvadratlar metodu və onun üsullarına həsr edilmişdir. Xüsusilə də, parametrik və korrelat tarazlaşdırma üsullarının nəzəri əsasları geniş şərh edilmiş və onların tətbiqi xüsusiyyətləri göstərilmişdir.

Dərslikdə ikiqruplu və kombinə edilmiş tarazlaşdırma üsulları haqqında məlumatlar verilmiş, bir sıra xüsusi məsələlərin həllinə də diqqət yetirilmişdir. Bunlara ilkin verilənlərin səhvlərini nəzərə almaqla tarazlaşdırma üsulları, bir-birindən asılı olan ölçmələrin tarazlaşdırılması, çoxsaylı ölçmələr qrupunun tarazlaşdırılması və s. misal ola bilər.

Dərsliyin sonuncu fəslində müasir geodeziyanın bir sıra məsələləri və onların tarazlaşdırılması yolları ilə bağlı materiallar yer tutur. Burada koordinat sistemləri arasında əlaqələr, peyk və yerüstü geodeziya şəbəkələrinin birgə tarazlaşdırılması, Kalman rekkurent düsturları ilə tarazlaşdırma qaydaları şərh olunur.

Onu da qeyd edək ki, dərslikdə verilmiş əksər nəzəri materiallar müvafiq məsələ həlləri ilə tamamlanır. Parametrik və korrelat tarazlaşdırma üsullarına dair məsələlər isə daha geniş izahlarla şərh edilir.

Dərsliyin tərtibi zamanı bir sıra məsələlər, statistik cədvəl və nəzəri materiallar ədəbiyyat siyahısında [2, 4] nömrəsi ilə göstərilmiş mənbələrdən götürülmüşdür.

Ümid edirik ki, dərslik yalnız universitet tələbələri üçün deyil, həmçinin geodeziya-kartoqrafiya fəaliyyəti ilə məşğul olan mühəndis-texniki işçilər üçün də gərəkli olacaqdır.

ÖLÇMƏLƏR SƏHVLƏRİ NƏZƏRİYYƏSİ

Fəsil 1
EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN ƏSAS ANLAYIŞ VƏ TEOREMLƏRİ

§1. Hadisələr və onların növləri

Ehtimal nəzəriyyəsi təsadüfi hadisələrin kəmiyyət qanunauyğunluqlarını öyrənən riyazi elmdir. Təsadüfi hadisələr elə hadisələrə deyilir ki, onlar üzərində aparılan təcrübə, müşahidə, sınaq dəfələrlə təkrarlanan zaman hər dəfə bir cür baş verir. Lakin təsadüfi hadisələr kütləvi şəkildə baş verdikdə, onların paylanmasının müəyyən qanunauyğunluqları üzərə çıxır (məsələn, müsbət və mənfi işarəli geodeziya ölçmə səhvlərinin təqribən eyni sayda olması).

Hər bir təcrübənin (müşahidənin) həyata keçirilməsi *sınaq*, sınağın nəticəsi *hadisə* adlanır. Məsələn, teodolitlə bucağın ölçülməsi bir sınaq olarsa, onda ölçmə səhvləri onun nəticəsi olan hadisələr kimi qəbul edilə bilər (müsbət işarəli ölçmə səhvi, mənfi işarəli ölçmə səhvi). Eyni zamanda hadisələri şərti olaraq *elementar* və *mürəkkəb* hadisələrə bölürlər. *Elementar hadisələr* elə hadisələrə deyilir ki, onları daha sadələrə bölmək mümkün deyil. *Mürəkkəb hadisələr* isə iki və daha çox elementar hadisələrdən ibarət olur. Məsələn, kəmiyyətin bir dəfə ölçülməsi zamanı müsbət işarəli səhvin baş verməsi elementar hadisə, lakin beş ölçmədən üçündə müsbət işarəli ölçmə səhvinin yaranması isə mürəkkəb hadisədir .

Müəyyən şərtlər daxilində aşağıdakı növ hadisələr baş verə bilər:

–**doğru hadisələr** – müəyyən şərtlər daxilində mütləq baş verir. Məsələn, teodolitin üfqi dairəsindən götürülmüş hesabatın Sağ Dairə və yaxud Sol Dairə vəziyyətinə uyğun gəlməsi hadisəsi. Doğru hadisələr **U** hərfi ilə işarə edilir;

–qeyri-mümkün hadisələr – verilmiş şəraitdə heç vaxt baş vermir. Məsələn, nivelirlə şaquli bucağın ölçülməsi hadisəsi. Qeyri-mümkün hadisələr **V** hərfi ilə işarələnir;

–üst-üstə düşməyən hadisələr – eyni zaman anında birgə baş verə bilməzlər. Məsələn, iki məntəqə arasındakı nisbi yüksəkliyin həm müsbət, həm də mənfi işarəli olması hadisələri;

–üst-üstə düşən hadisələr – eyni zaman anında baş verməsi mümkün olan hadisələrdir. Məsələn, iki məntəqə arasındakı nisbi yüksəkliyin müsbət işarəli, eyni zamanda nivelir stansiyaları sayının da cüt rəqəmli olması hadisələri;

–tam qrup təşkil edən hadisələr – elə hadisələrə deyilir ki, sınaq zamanı qrupu təşkil edən hadisələrdən hansısa biri mütləq baş verir. Tam qrup doğru hadisədir. Məsələn, müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri tam qrup təşkil edir;

–əks hadisələr – üst-üstə düşməyən və tam qrup təşkil edən iki hadisədən ibarətdir. A hadisəsinə əks olan hadisə $\overline{A}$ şəklində göstərilir. Məsələn, A – müsbət işarəli ölçmə səhvidirsə, $\overline{A}$ – mənfi işarəli ölçmə səhvi olar;

–eynimümkünatlı hadisələr – verilmiş şəraitdə eyni baş vermə mümkünlüyünə malik hadisələrdir. Məsələn, bucağın ölçülməsi zamanı müsbət və ya mənfi işarəli ölçmə səhvlərinin baş verməsi eynimümkünatlı hadisələrdir;

–bir-birindən asılı olmayan hadisələr – elə hadisələrə deyilir ki, onlardan hər hansı birinin baş vermə mümkünlüyü digər hadisələrin artıq baş verib-verməməsindən asılı deyildir. Məsələn, məsafənin uzunluğunu təyin edərkən, ikinci ölçmə səhvinin işarəsinin mənfi olmağına birinci ölçmə nəticəsinin işarəsinin heç bir təsiri yoxdur;

–**bir-birindən asılı hadisələr** – bu halda hadisənin baş vermə mümkünlüyünə digər hadisələrin bu sınağadək baş verib-verməməsi təsir göstərir. Məsələn, teodolit gedişində məntəqənin koordinat dəqiqliyinə gediş üzrə özündən əvvəlki məntəqənin səhvləri təsir göstərir.

Ümumi halda hadisələr latın əlifbasının baş hərfləri ilə işarələnir.

§2. Ehtimalın bilavasitə hesablanma qaydası

Hər bir hadisə ehtimal anlayışı ilə əlaqəlidir. Hadisənin ehtimalı onun baş vermə dərəcəsini (mümkünlüyünü) göstərən ədəddir və P hərfi ilə işarə olunur. Elə hadisələr vardır ki, onların ehtimalını müvafiq sınaq keçirmədən və yalnız sınağın şərtləri əsasında təyin etmək olur. Bunun üçün həmin hadisələr elementar hadisələr olub, «təsadüflər sxemi» təşkil etməlidir. Təsadüflər sxemini isə üst-üstə düşməyən, simmetrik nəticələrə malik, bərabər mümkünatlı hadisələr yarada bilər.

Tutaq ki, sınaq «təsadüflər sxemi» üzrə aparılır. Onda A hadisəsinin ehtimalını aşağıdakı düsturla hesablanır.

$$P(A)=\frac{M}{N}, \tag{1.1}$$

burada: $P(A)$ – hadisənin ehtimalı; N – təsadüflərin ümumi sayı; M – hadisənin baş verməsi üçün əlverişli olan təsadüflər sayıdır.

Əlverişli təsadüf A hadisəsinin baş verməsinə səbəb olan təsadüfdür. (1.1) düsturunu təhlil etsək görərik ki, hadisənin ehtimalı $0 \le P(A) \le 1$ arasında qiymətlər alır. Doğru hadisənin ehtimalı $P(U)=1$, qeyri-mümkün hadisənin ehtimalı isə $P(V)=0$ olar.

Ehtimalın (1.1) düsturu ilə təyin edilməsi onun *klassik yo-*

lu, hesablanması isə *bilavasitə hesablanma qaydası* adlanır.

Məsafənin ölçü lenti ilə bir dəfə ölçülməsi təsadüflər sxeminə uyğun gəlir. Onda (1.1) düsturuna əsasən müsbət işarəli ölçmə səhvinin baş vermə ehtimalı üçün taparıq:

N=2 (iki hadisə baş verə bilər: müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri);

M=1 (müsbət səhvin baş verdiyi əlverişli təsadüflər sayı).

Buradan $P_{(+)} = \frac{1}{2}$ olar.

Başqa bir misal göstərək. Tutaq ki, verilmiş xəttin rumb bucağının hər hansı bir cəhət rübünə düşməsi ehtimalını tapmaq tələb olunur. Bu hadisələr «təsadüflər sxemi»nə uyğun gəldiyindən, onun ehtimalını da (1.1) düsturu ilə hesablamaq olar.

Məlumdur ki, dörd cəhət rübü vardır, yəni N=4. Rumb bucağının hər hansı bir rübə düşməsi təsadüfi M=1. Buradan alarıq:

$$P_{rumb} = \frac{M}{N} = \frac{1}{4}.$$

Daha mürəkkəb məsələlərin həlli zamanı ümumi və əlverişli təsadüflərin sayını təyin etmək üçün kombinator riyaziyyatın qruplaşmalarından (kombinasiyalarından) istifadə edilir. Ona görə də, kombinator riyaziyyatdan bəzi qruplaşmalara baxaq.

Məlumdur ki, ℓ sayda *a*, *b*, *c*,..... elementlərindən aşağıdakı növ kombinasiyaları qurmaq olar:

1. Permutasion (yerdəyişmə) – elementləri yalnız yerləşmə ardıcıllığına görə fərqlənən kombinasiyalardan ibarətdir. Bu halda yerdəyişmələrin sayı

$$P_\ell = \ell! \qquad (1.2)$$

düsturu ilə təyin edilir.

2. Aranjeman – ℓ sayda elementlərdən hər birində k sayda element olan kombinasiyalar şəklində qurulur. Bu kombinasiyalarda elementlər həm yerləşmə ardıcıllığı, həm də elementlərin özləri ilə fərqlənir. Məsələn, a, b, c elementlərindən hər birində iki element olan aşağıdakı aranjeman kombinasiyalar qurmaq olar:

$$(ab), (ac), (bc), (ba); (ca); (cb).$$

Aranjeman kombinasiyalarının ümumi sayını aşağıdakı düsturla təyin edirlər:

$$A_\ell^k = \frac{\ell!}{(\ell-k)!}. \tag{1.3}$$

3. Kombinizon – ℓ sayda elementlərdən hər birində k sayda fərqli elementləri olan kombinasiyalar şəklində qurulur. Məsələn, a, b, c elementlərindən hər birində iki element olan kombinasiyalar (ab); (bc); (ac) olar.

Ümumi halda kombinizonların sayı

$$C_\ell^k = \frac{\ell\,!}{(\ell-k)\,!\cdot k\,!} \tag{1.4}$$

düsturu ilə təyin edilir. Xüsusi halda

$$C_\ell^0 = C_\ell^\ell = 1; \quad C_\ell^1 = \ell; \quad C_\ell^{\ell-k} = C_\ell^k$$

qəbul edirlər.

4. Təkrarlı permutasion – ℓ elementdən təşkil edilmiş kombinasiyalarda hər bir ℓ_i elementi k sayda növdən ibarətdir. Bu halda kombinasiyaların ümumi sayı belə tapılır:

$$P(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k) = \frac{\ell!}{\ell_1! \ell_2! \cdots \ell_k!}. \qquad (1.5)$$

5. Təkrarlı aranjeman – hər biri k növ olan s sayda elementlər kombinasiyalarından ibarətdir. Bu qruplaşmada kombinasiyaların sayı:

$$\overline{A}_s^k = S^k. \qquad (1.6)$$

Kombinator riyaziyyatdan bir neçə məsələ həll edək.

Məsələ 1.1. Dörd nivelir reperinin yüksəklik qiymətlərini kataloqda yazarkən onların sıra nömrələri ilə bağlı anlaşılmazlıq yaranmışdır. Bu yüksəklik qiymətlərinin kataloqda düzgün ardıcıllıqda yazılacağı ehtimalı tapmalı.

Həlli. Aydındır ki, yüksəkliklərin düzgün yazılışı yalnız $M=1$ əlverişli halında mümkündür. Bütün başqa hallarda, yəni məntəqələrdən hər hansı birinin sıra nömrəsinin düzgün göstərilmədiyi halda, yüksəkliklərin düzülüşü doğru olmayacaqdır. Digər tərəfdən təsadüflərin qruplaşması permutasion qaydasına uyğun gəldiyindən, (1.2) düsturu əsasında təsadüflərin ümumi sayı üçün alarıq:

$$N = P_4 = 4!.$$

Onda yüksəklik qiymətlərinin kataloqda düzgün ardıcıllıqla yazılma ehtimalı (1.1) düsturuna görə

$$P_{düzgün} = \frac{M}{N} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

olar.

Məsələ 1.2. Məsələ 1.1-in şərtləri daxilində sonuncu üç yüksəklik qiymətinin yazılma ardıcıllığının düzgün göstəriləcəyi ehtimalı təyin edək.

Həlli. Məsələnin belə qoyuluşunda da əlverişli təsadüflərin sayı $M=1$. Təsadüflərin ümumi qruplaşması sayı isə aranjeman kombinasiyası təşkil edir. Onda (1.3) düsturu ilə tapırıq:

$$N = A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4!.$$

Əlverişli və ümumi təsadüflər sayının konkret qiymətlərini (1.1) düsturunda yazsaq, qeyd edilən mürəkkəb hadisənin ehtimalı üçün belə bir qiymət alarıq:

$$P_3 = \frac{M}{N} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Məsələ 1.3. Çöl ölçmələri jurnalında müxtəlif üçbucaqlardan beş üfüqi bucağın qiyməti verilmişdir. Eyni üçbucağa aid olan üç sayda bucağın düzgün seçiləcəyi ehtimalı tapmalı.

Həlli. Aydındır ki, üçbucağın bucaqları yalnız bir təsadüf nəticəsində düzgün seçilə bilər, yəni $M=1$. Təsadüflərin ümumi sayı isə kombinizon qruplaşması üzrə hesablanmalıdır. Çünki, bucaqlar istənilən ardıcıllıqla düzülə bilər $(N = C_5^3)$. Onda, tələb olunan hadisənin baş vermə ehtimalı üçün (1.4) düsturunu da nəzərə alsaq, belə bir qiymət taparıq:

$$P_{\text{üçbucaq}} = \frac{M}{N} = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{\dfrac{5!}{(5-3)!3!}} = \frac{2!3!}{5!} = \frac{1}{10}.$$

Məsələ 1.4. Məsafənin uzunluğu dörd təkrar ölçmədən tapılır. Birinci və üçüncü ölçmələr müsbət, ikinci və dördüncü ölçmələrdə isə mənfi işarəli ölçmə səhvinin baş vermə ehtimalını hesablayın.

Həlli. Bu halda da tələb edilən təsadüfün yalnız bir şəraitdə doğru olması mümkündür, yəni M=1. Ümumi təsadüflər sayı (1.5) düsturu ilə təyin edilir. Çünki bu mürəkkəb hadisə zamanı həm müsbət, həm də mənfi işarəli ölçmə səhvləri baş verir və təkrarlanır. Deyilənləri nəzərə almaqla qoyulmuş mürəkkəb hadisənin ehtimal qiyməti

$$P=\frac{1}{\frac{4!}{2!2!}}=\frac{2!2!}{4!}=\frac{1}{6} \text{ olar.}$$

Məsələ 1.5. Bazisin uzunluğu üç dəfə təkrar ölçmələrdən tapılır. Bu ölçmələrdən ikisinin müsbət işarəli ölçmə səhvinə malik olacağı hadisənin ehtimalını təyin edin.

Həlli. Şərtə görə müsbət işarəli ölçmə səhvləri təkrarlandığından, ümumi təsadüflər sayı (1.6) düsturu ilə hesablanmalıdır. Öz növbəsində S=2, K=3 olduğundan,

$$N=\overline{A}_2^3=2^3=8.$$

Bu mürəkkəb hadisə zamanı əlverişli təsadüflərin sayı $M = C_3^2=3$. Onda üç ölçmədən ikisində ölçmə səhvinin müsbət işarəli olacağı ehtimalı üçün alarıq:

$$P=\frac{M}{N}=\frac{C_3^2}{\overline{A}_2^3}=\frac{3}{8}.$$

§3. Nisbi tezlik və hadisənin ehtimalı

Hadisənin ehtimalı (1.1) düsturu ilə hesablanarkən qəbul edilir ki, bu elementar hadisələr «təsadüflər sxemi» təşkil edirlır. Lakin hadisələrin «təsadüflər sxemi»nə uyğun gəlmədiyi fərqli hallarda ehtimalı təyin etmək üçün başqa üsullardan istifadə edilir. Bu üsullar sınaq (eksperiment) və hadisənin nisbi tezliyi anlayışları ilə sıx bağlıdır.

Tərif. Hadisənin nisbi tezliyi (Q) verilmiş ölçmə şəraitində həmin hadisənin baş vermə sayının (m) ümumi sınaqlar sayına (n) olan nisbətinə deyilir, yəni

$$Q = \frac{m}{n}. \tag{1.7}$$

(1.7) düsturuna əsasən hadisənin nisbi tezliyi üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğru olar:

$$0 \le Q \le 1, \quad (0 \le m \le n).$$

Hadisənin baş verməsinin nisbi tezliyi və ehtimalı bir-birinə çox yaxın anlayışlardır. Onlar arasında əlaqə Bernulli teoremi ilə ifadə olunur.

Bernulli teoremi. Böyük sayda sınaqlar zamanı vahidə yaxın ehtimalla gözləmək olar ki, hadisənin nisbi tezliyi onun ehtimalına yaxınlaşacaqdır, yəni

$$\text{eht.}\lim_{n\to\infty} Q = P. \tag{1.8}$$

Ehtimal limiti ($\text{eht.}\lim\limits_{n\to\infty} Q = P$) riyazi limitdən fərqlənir və kəmiyyətin son həddə yaxınlaşma meylliyini göstərir. Bəzi ədəbiyyatlarda nisbi tezliyi *hadisənin statistik ehtimalı* adlandırırlar.

Məsələ 1.6. Bucaq ölçmələri zamanı məlum olub ki, müsbət işarəli ölçmə səhvlərinin nisbi tezliyi Q=0,40-dır. Əgər mənfi işarəli ölçmə səhvlərinin sayı 15-ə bərabərdirsə, ümumi ölçmələr sayını təyin edin.

Həlli. Müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri tam qrup təşkil etdiyindən onların nisbi tezliklər cəmi üçün yaza bilərik:

$$Q_{müsbət} + Q_{mənfi} = 1.$$

Eyni zamanda nəzərə alsaq ki, $Q_{mənfi} = \frac{m_{mənfi}}{n_{ümumi}}$, onda

$$Q_{müsbət} + \frac{m_{mənfi}}{n_{ümumi}} = 1$$

olar. Buradan

$$n_{ümumi} = \frac{m_{mənfi}}{1 - Q_{ümumi}} = \frac{15}{1 - 0,40} = 25$$

taparıq.

§4. Hadisələr cəmi. Üst-üstə düşməyən hadisələr cəminin ehtimalı

Baş vermə şəraitindən asılı olaraq mürəkkəb hadisələri elementar hadisələrin cəmi və yaxud hasili şəklində ifadə etmək olar.

Tərif. İki və ya bir neçə elementar A_i (i=1, 2, ..., n) hadisələrinin cəmi elə bir mürəkkəb B hadisəsinə deyilir ki, istənilən sınaq zamanı A_i hadisələrindən heç olmazsa biri baş vermiş olsun.

Riyazi dildə hadisələrin cəmi

$$B=(A_1,\ \text{və ya}\ A_2,\ \text{və ya}\ A_3,\ldots,\ \text{və ya}\ A_n) \tag{1.9}$$

və yaxud

$$B=A_1+A_2+\ldots+A_n=\sum_{i=1}^{n} A_i \tag{1.10}$$

şəklində yazılır. Əgər sadə hadisələrdən hər birinin ehtimalı məlum olarsa, onda onların cəmi olan mürəkkəb hadisənin ehtimalını hesablamaq çətin deyildir. Bu aşağıdakı teoremlə təyin olunur.

Teorem. İki və ya bir neçə üst-üstə düşməyən elementar hadisələr cəminin ehtimalı bu hadisələrin ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\ . \tag{1.11}$$

Nəticə 1. Tam qrup təşkil edən hadisələrin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(U)=1. \tag{1.12}$$

Nəticə 2. Bir-biri ilə qarşılıqlı əks olan iki hadisə tam qrup təşkil etdiyindən, onların ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir:

$$P(A)+P(\overline{A})=1\ \text{və}\ P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.13}$$

Məsələ 1.7. Fərz edək ki, taxeometriya planalması zamanı 100 piket nöqtəsindən 10-nun yüksəkliyi $\frac{1}{2}h$, 60-nın $\frac{1}{4}h$, 30-un isə $\frac{1}{3}h$ dəqiqliyi ilə tapılır. Planşetdən götürülmüş hər hansı bir nöqtənin yüksəklik qiymətinin $\frac{1}{5}h$ və ya $\frac{1}{4}h$ dəqiqliyinə bərabər olacağı ehtimalı təyin edin (burada h – kəsmə yüksəkliyidir).

Həlli. Məsələnin şərtinə əsasən birinci hadisənin, yəni nöqtənin yüksəkliyinin $\frac{1}{5}h$ dəqiqliyində olacağı ehtimalı $P(A_1)=\frac{10}{100}$ olar. Eynilə ikinci hadisə ($\frac{1}{4}h$ dəqiqliyi) üçün ehtimal qiyməti $P(A_2)=\frac{60}{100}$ taparıq. Bütövlükdə ehtimalı təyin edilən hadisə mürəkkəb hadisə olub elementar A_1 və A_2 hadisələrinin cəmi şəklində göstərilə bilər: $B=A_1+A_2$. Ona görə də mürəkkəb B hadisəsinin ehtimalı (1.11) düsturu ilə hesablanmalıdır:

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{10}{100}+\frac{60}{100}=0,7.$$

§5. Hadisələrin hasili və hasilin ehtimalı

Tərif. İki və ya bir neçə üst-üstə düşməyən elementar $A_i(i=1, 2, ..., n)$ hadisələrinin hasili elə bir mürəkkəb C hadisəsidir ki, bu zaman bütün A_i hadisələri birlikdə (eyni vaxtda) baş vermiş olsun.

Hadisələrin hasili şərti olaraq belə yazılır:

$$C=A_1, \text{ və } A_2, \text{ və } A_3, ..., \text{ və } A_n \tag{1.14}$$

və yaxud

$$C=A_1 \cdot A_2 \cdots A_n=\prod_{i=1}^{n} A_i, \tag{1.15}$$

burada П – hasil işarəsidir.

Teorem. Bir-birindən asılı olmayan elementar hadisələr hasilinin ehtimalı həmin hadisələrin ehtimalları hasilinə bərabərdir.

Əgər $C = \prod_{i=1}^{n} A_i$, onda

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.16)$$

(1.16) düsturu ilə hesablanmış $P(A_i)$ ehtimalları, eləcə də onların hasil ehtimalı $P(C)$ *şərtsiz ehtimal* adlanır. Bir-birindən asılı olan hadisələrin ehtimalı isə *şərtli ehtimal* adlanır. Məsələn, $P(A_2/A_1)$ yazılışı A_1 hadisəsinin artıq baş verdiyini nəzərə almaqla A_2 hadisəsi üçün hesablanmış şərti ehtimalı ifadə edir. $P(A_i/A_1, A_2, ..., A_{i-1})$ – yazılışında isə $A_1, A_2, ..., A_{i-1}$ hadisələrinin baş verdiyi göstərilir və A_i üçün şərti ehtimal hesablanır.

Teorem. İki və ya bir neçə asılı hadisələr hasilinin ehtimalı bu hadisələrdən hər hansı birinin şərtsiz ehtimalının digər hadisələrin şərtli ehtimallarına olan hasili şəklində təyin edilir, yəni:

$$P(C)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot ...\cdot P(A_n/A_1, A_2, ..., A_{n-1}). \qquad (1.17)$$

Məsələ 1.8. Ehtimalların vurulması düsturundan istifadə edərək məsələ 1.1-i həll edin.

Həlli. Məsələ 1.1-in şərtləri daxilində bütün dörd yüksəklik qiymətinin kataloqda düzgün yazılacağı hadisəsi mürəkkəb hadisədir və onun ehtimalını (1.17) düsturu ilə hesablamaq olar. Çünki bütün yüksəkliklərin kataloqda öz yerində düzgün yazılması eyni zaman anında baş verməlidir. Bu isə o deməkdir ki, tələb edilən mürəkkəb hadisə elementar hadisələrin hasili şəklində ifadə edilməlidir. Onda hasilin ehtimalı üçün

$$P(H)=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)\cdot P(H_4)$$

yaza bilərik.

Eyni zamanda nəzərə almaq lazımdır ki, bu elementar hadisələr bir-birindən asılı hadisələrdir. Onda hər bir yüksəkliyin kataloqda öz yerində yazılacağı ehtimalları üçün aşağıdakı qiymətləri alarıq:

$$P(H_1)=\frac{1}{4};\qquad P(H_2)=\frac{1}{3};\qquad P(H_3)=\frac{1}{2};\qquad P(H_4)=1.$$

Buradan isə hasilin ehtimalı üçün taparıq

$$P(H)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{24}.$$

Məsələ 1.9. Müsbət işarəli ölçmə səhvinin məhz dördüncü təkrar məsafə ölçməsində baş verəcəyi ehtimalı tapın.

Həlli. Məsələnin şərtində verilən elementar hadisələr (müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvləri) bir-birindən asılı olmadığından (1.16) düsturuna əsasən yaza bilərik

$$P(C)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)\cdot P(A_4).$$

Burada: $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ hərfləri ilə birinci, ikinci və üçüncü ölçmələrdə mənfi işarəli səhvlər, A_4-lə isə dördüncü ölçmədə müsbət işarəli səhvin baş verəcəyi hadisələr işarə edilmişdir. Eyni zamanda bu elementar hadisələrin vahid ölçmədən baş vermə ehtimalı $P(A_i)=P(\overline{A}_i)=\frac{1}{2}$ olduğundan, hasil hadisənin ehtimalı üçün yaza bilərik:

$$P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

§6. Üst-üstə düşən hadisələr ehtimalının tapılması

Teorem. Üst-üstə düşən hadisələr cəminin ehtimalı vahid və həmin hadisələrə əks olan hadisələrin ehtimallar hasili fərqinə bərabərdir, yəni

$$P(B)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A}_i). \tag{1.18}$$

Burada B hadisəsi sözlə belə təyin edilir:

$B=A_1$ və ya A_2, ..., və ya A_n və ya, bütün A_n

və yaxud

$B=$ heç olmazsa bir A_i.

(1.18) ifadəsinin doğruluğunu isbat etmək üçün B hadisəsinə əks olan $\overline{B}$ hadisəsinə baxaq. Aydındar ki, əks $\overline{B}$ hadisəsi belə yazılar: heç bir A_i; yaxud $\overline{B}=\overline{A}_1$ və $\overline{A}_2$,... və $\overline{A}_n$. Bu isə o deməkdir ki, bütün əks $\overline{A}_i$ hadisələrinin hasili tapılmalıdır. Onda ehtimalların vurulması teoreminə görə $P(\overline{B})=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot...\cdot\overline{A}_n)$. Eyni zamanda B düz və $\overline{B}$ əks hadisələr olub tam qrup təşkil etdiyindən, onların ehtimalları üçün yaza bilərik: $P(B)+P(\overline{B})=1$. Buradan isə (1.18) düsturu alınır.

Əgər bütün hadisələr bir-birindən asılı olmayıb eyni $P(A_i)$ qiymətinə malikdirsə, onda (1.18) düsturu aşağıdakı şəklə düşər

$$P(B)=1-\{P(\overline{A})\}^n. \tag{1.19}$$

Məsələ 1.10. İki geodeziya ölçməsindən heç olmazsa birinin müsbət işarəli ölçmə səhvinə malik olacağı ehtimalı təyin edin.

Həlli. Birinci ölçməni A_1 ilə, ikincini isə A_2 ilə işarə edək. Onda məsələnin şərtində qoyulmuş mürəkkəb *B* hadisəsini belə ifadə edə bilərik:

$$B = A_1^{(-)} \cdot A_2^{(+)} + A_1^{(+)} \cdot A_2^{(-)} + A_1^{(+)} \cdot A_2^{(+)} .$$

Eyni zamanda $P(A_i^{(-)})=P(A_i^{(+)})=\frac{1}{2}$ olduğundan, mürəkkəb *B* hadisəsinin ehtimalı üçün (1.11) və (1.16) düsturlarına əsasən belə bir qiymət alarıq:

$$P(B) = P(A_1^-) \cdot P(A_2^+) + P(A_1^+) \cdot P(A_2^-) + P(A_1^+) \cdot P(A_2^+) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,75.$$

Bu məsələ (1.19) düsturunun köməyi ilə daha asan həll edilir:

$$P(B) = 1 - \{P(\overline{A})\}^2 = 1 - \left\{\frac{1}{2}\right\}^2 = \frac{3}{4} = 0,75 .$$

§7. Dəfələrlə təkrarlanan sınaqlar. Bernulli düsturu

Geodeziya işləri yerinə yetirilərkən, demək olar ki, həmişə kəmiyyətlərin (bucaq, məsafə) qiyməti təkrar ölçmələrlə təyin edilir. Məsələn, alətlərin texniki yoxlanması, yeni ölçmə metodikalarının istehsalatda tətbiqi və sairə hallarda sınaqların dəfələrlə təkrarlanması tələb olunur. Bu zaman tədqiqatçını sınağın baş verə biləcək bütün mümkün nəticələri və onlara uyğun gələn ehtimal qiymətləri maraqlandırır.

Fərz edək ki, bir-birindən asılı olmayan *n* sayda sınaq yerinə yetirilir və *A* hadisəsinin hər bir sınaq zamanı baş vermə ehtimalı sabit qalaraq P-yə bərabərdir. Qeyd edilən şərtlər daxilində A hadisəsinin sınaqlar zamanı baş vermə ardıcıllığından asılı olmayaraq k dəfə təkrarlanacağı ehtimalı tapaq. Qoyulmuş məsələnin məzmunu Bernulli düsturundan istifadə şərtlərinə uyğun gəlir. Ona görə də bu məqsədlə Bernulli düsturundan istifadə edək:

$$P_n^k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{1.20}$$

Burada: P_n^k – n sınaqdan k dəfə baş verəcək A hadisəsinin ehtimalı; C_n^k – kombinizion (n elementdən hər birində k element olmaqla); p – bir sınaq zamanı A hadisəsinin baş vermə ehtimalı, q – isə həmin hadisənin baş verməməsi ehtimalıdır.

$P_n(k)$ ehtimallar çoxluğu *ehtimalların binominal paylanması* adlanır. Binomial paylanmada A hadisəsinin 0, və ya 1, ..., və ya n dəfə baş verməsi tam qrup təşkil edən mürəkkəb hadisədir. Ona görə də (1.11) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1 \tag{1.21}$$

Əgər tədqiqatçını A hadisəsinin n sayda sınaqdan ℓ dəfədən az olmayaraq baş verməsi ehtimalı maraqlandırırsa, onda aşağıdakı düsturdan istifadə edilə bilər:

$$P_n(k \geq \ell) = \sum_{k=\ell}^{n} P_n(k). \tag{1.22}$$

A hadisəsinin ℓ dəfədən çox olmayan sayda baş verməsi ehtimalı isə

$$P_n(k \le \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} P_n(k) \tag{1.23}$$

düsturu ilə təyin edilir.

Bəzi tədqiqatlar zamanı bir-birindən asılı olmayan n hadisədən hansısa biri xüsusi əhəmiyyət daşıyır və onun baş vermə ehtimalı təcrübi maraq daşıyır. Bu hadisənin ehtimalını aşağıdakı düsturla təyin etmək olar

$$P(A_n) = 1 - q_1 q_2 ... q_n, \tag{1.24}$$

burada: $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$ müvafiq $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ hadisələrinin baş verməməsi, başqa sözlə desək, bu hadisələrə əks olanların baş verməsi ehtimallarıdır.

Məsələ 1.11. İki məntəqə arasında məsafənin uzunluğu üç dəfə ölçülmüşdür. Bu zaman müsbət işarəli ölçmə səhvinin: 1) hər üç halda; 2) iki dəfədən az olmamaqla baş verəcəyi ehtimalları təyin edin.

Həlli. Nəzərə alsaq ki, müsbət və mənfi işarəli ölçmə səhvlərinin ehtimalı $p = q = 1/2$, onda Bernulli düsturuna əsasən üç müsbət işarəli ölçmə səhvinin baş verəcəyi mürəkkəb hadisənin ehtimalı üçün yaza bilərik:

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Məsələdə verilmiş ikinci hadisənin ehtimalını hesablamaq üçün ilk növbədə iki müsbət işarəli səhvin baş vermə ehtimalını təyin etmək lazımdır:

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Onda müsbət işarəli ölçmə səhvinin sayının ikidən az olmayacağı mürəkkəb hadisə üçün (1.22) düsturuna əsasən

$$P_3(k \geq 2) = P_3(2) + P_3(3) = 0{,}125 + 0{,}375 = 0{,}50$$

tapırıq.

§8. Təkrarlanan sınaqlarda hadisənin ehtimal baş vermə sayı

Elmi-təcrübi tədqiqatlar zamanı eksperiment və nəzəri hesablamalar yerinə yetirilərkən elə hallar olur ki, tədqiqatçını hansısa hadisənin baş vermə ehtimalından çox onun sınaqlarla ehtimal olunan baş vermə sayı maraqlandırır.

Dəfələrlə təkrarlanan sınaqlarda hadisənin *ehtimal baş vermə sayı* (k_0) verilmiş sınaq şəraiti üçün ən böyük ehtimal qiymətinə malik ədədə deyilir. Riyazi dildə bu şərt belə yazılır:

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k_0+1); \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1). \end{cases} \qquad (1.25)$$

Ehtimal nəzəriyyəsində göstərilir ki, (1.25) şərtinin doğruluğu üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənməlidir

$$np - q \leq k_0 \leq np + q\,. \qquad (1.26)$$

Sınaqların böyük sayda, ehtimalın isə sıfra çox yaxın olmayan qiymətlərində təcrübi məqsədlər üçün ehtimal baş vermə sayının təqribi qiymətlərini (1.26) düsturu əvəzində

$$k_0 \approx np \qquad (1.27)$$

ifadəsi ilə hesablamaq olar.

Məsələ 1.12. Fərz edək ki, geodeziyadan çöl təcrübəsi zamanı tələbələr hesabat götürərkən təcrübəsizllik səbəbindən $p=\frac{1}{5}$ ehtimala malik kobud səhvə yol verirlər ($q=\frac{4}{5}$). Onda neçə hesabatdan sonra 10 sayda kobud səhv baş verəcəkdir?

Həlli. Məsələnin həlli (1.26) düsturu əsasında aparılır və verilənlərə görə aşağıdakı bərabərsizlikləri yaza bilərik:

$$\frac{1}{5}n-\frac{4}{5}\leq 10, \qquad \frac{1}{5}n+\frac{4}{5}\geq 10.$$

Buradan

$$49\leq n\leq 54$$

alarıq.

§9. Lokal Laplas teoremi

Qeyd etmək lazımdır ki, binominal paylanma qanunundan istifadə etməklə məsələlərin həlli sınaqlar sayının böyük olmadığı hallarda mümkün və əlverişlidir. Lakin sınaqların sayı artdıqca binominal paylanma qanunundan, eləcə də Bernulli düsturundan istifadə çətinləşir, çünki bu böyük həcmli hesablamalara gətirib çıxarır. Digər tərəfdən sınaqların sayının artması ilə Bernulli düsturunda bəzi toplananların qiyməti nəzərə alınmaz dərəcəyədək kiçilir. Ona görə də hesablamaları asanlaşdırmaq və həcmini kiçiltmək məqsədi ilə cüzi təqribiliyə yol verilsə də hadisənin ehtimalını normal paylanma qanunundan istifadə etməklə təyin etmək məqsədəuyğun olur. Normal paylanma qanununun bu tətbiqdə istifadəsi Lokal Laplas teoremi ilə əsaslandırılır.

Teorem. Əgər A hadisəsinin vahid sınaq zamanı baş vermə ehtimalı 0 və 1 qiymətindən əhəmiyyətli fərqlənirsə və bütün təkrar sınaqlarda sabit p qiymətinə bərabərdirsə, onda A hadisəsinin n sınaqdan k dəfə baş vermə ehtimalı $P_n(k)$ təqribi olaraq aşağıdakı funksiya əsasında hesablana bilər:

$$P_n(k) \approx y_x = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (1.28)$$

burada $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Qeyd edək ki, (1.28) ifadəsində n artdıqca P_n^k-nın təyin edilmə dəqiqliyi artmış olur. y_x funksiyasının $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ifadəsinə əsasən xüsusi qiymətlər cədvəlləri tərtib edilmişdir (Əlavə 1). $\varphi(x)$ funksiyası *paylanma sıxlığı funksiyası* adlanır və cüt funksiya olduğundan x arqumentinin müsbət, eləcə də, mənfi qiymətlərində həmin cədvəllərdən istifadə etmək olar.

A hadisəsinin n sınaqdan k dəfə baş vermə ehtimalının təqribi qiymətini paylanma funksiyası əsasında aşağıdakı ifadədən taparıq:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \qquad (1.29)$$

Məsələ 1.13. İki məntəqə arasında məsafənin uzunluğu on dəfə təkrarən ölçülmüşdür. Onlardan dördündə ölçmə səhvinin müsbət işarəli olacağı ehtimalı tapın.

Həlli. Əvvəlcə x arqumentinin qiymətini hesablayaq. Aydındır ki, bir sınaqda ölçmə səhvinin müsbət işarəli olması və yaxud olmaması hadisələri bərabər olduğundan onların ehtimalları $p = q = \frac{1}{2}$ olar. Bunları nəzərə alsaq,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = (4 - 10 \cdot \frac{1}{2}) \Big/ \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -0{,}632.$$

taparıq. Alınmış $x = -0{,}632$ üçün əlavə 1-dəki cədvəldən müvafiq $\varphi(x) = 0{,}3261$ qiymətini seçirik. Onda (1.29) düsturuna əsasən

$$P_{10}(4) = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot 0{,}3261 = 0{,}207$$

olar. Bu məsələnin Bernulli düsturu ilə həllindən də eyni nəticə alınır

$$P_{10}(4) = 0{,}205.$$

§10. Ehtimallar inteqralı

Əvvəlki bölmədən məlumdur ki, Bernulli düsturunun köməyi ilə hər hansı bir hadisənin $[a, b]$ intervalında baş verəcəyi P_a^b ehtimalını təyin etmək olar. Lakin qeyd edildiyi kimi, bu zaman müəyyən təqribiliyə yol verilsə də, hesablamaları asanlaşdırmaq məqsədi ilə normal paylanma qanunundan istifadə daha məqsədəuyğundur. Başqa sözlə desək, aralığa düşən hər bir $P_n(k)$ ehtimalını ayrıca hesablamadan onların $\sum_{k=a}^{b} P_n^k$ cəmini aşağıdakı müəyyən inteqral şəklində təyin etmək mümkündür:

$$P_a^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_a}^{t_b} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \qquad (1.30)$$

burada: a və b hadisənin təkrarlanma sayının aşağı və yuxarı hədləri; t_a və t_b isə $t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ funksiyasında k-nın yerində a və b qiymətlərini yazmaqla təyin edilir.

Əgər P_a^b ehtimalının hesablanması Y oxuna nəzərən simmetrik $\pm\xi_0$ intervalında həyata keçirilirsə və nəzərə alsaq ki, inteqralaltı funksiya cüt funksiyadır, onda (1.30) düsturu aşağıdakı şəklə düşər

$$P_{-\xi_0}^{+\xi_0} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(t), \qquad (1.31)$$

burada:

$$t = h|\xi_0|; \quad h = \sqrt{\frac{n}{pq}}; \quad -\xi_0 = \frac{k_0 - a}{n} - p; \quad +\xi = \frac{k_0 + a}{n} - p;$$

$\pm a$ isə k ədədinin $k_0 = np$ qiymətindən olan meylliyidir.

$\Phi(t)$ funksiyası *ehtimallar inteqralı* adlanır və onun qiymətlərinin təyini üçün xüsusi cədvəllər tərtib edilmişdir (Əlavə 3).

Məsələ 1.14. Geodeziya şəbəkəsində 64 sayda ölçmə yerinə yetirilmişdir. Müsbət işarəli ölçmə səhvlərinə malik ölçmələr sayının $16 \le k \le 40$ aralığında yerləşmə ehtimalını tapın.

Həlli. Məsələni ehtimallar inteqralından istifadə etməklə həll edək. Əvvəlcə bu inteqralın hədd qiymətlərini hesablayaq:

$$p = q = \frac{1}{2};$$

$$t_a = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{16 - 64 \cdot 0{,}5}{\sqrt{64 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -4;$$

$$t_b = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 64 \cdot 0{,}5}{\sqrt{64 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 2.$$

Əlavə 3-də verilmiş cədvəldən $t_a = -4$ və $t_b = 2$ qiymətlərinə uyğun gələn $F(t_a) = -0{,}4999$ və $F(t_b) = -0{,}4772$ qiymətlərini seçirik. Sonra bu qiymətləri (1.30) düsturunda yerinə qoymaqla

$$P_{16}^{40} = F(2) - F(-4) = 0{,}4772 - (-0{,}4999) = 0{,}977$$

tapırıq.

F ə s i l 2

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏRİN PAYLANMA QANUNLARI

§11. Paylanma qanunlarının ifadə olunma formaları

Birinci fəsildə təsadüfi hadisələrlə tanış olduq. Təsadüfi kəmiyyətlər təsadüfi hadisələrdən fərqlənsə də, onlar arasında qarşılıqlı əlaqə yaratmaq çətin deyildir. Məsələn, A hadisəsinin sınağı zamanı iki nəticə alına bilər: hadisə baş verər və yaxud baş verməz. Onda A hadisəsinin baş verdiyi halda onun qarşılıqlı əvəzi kimi X təsadüfi kəmiyyətinin vahid qiymətini, əks halda, yəni hadisə baş vermədiyi halda isə onun sıfır qiymətini yazmaq olar.

Təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün qiymətlər çoxluğu tam qrup təşkil edir. Ümumi halda isə *təsadüfi kəmiyyət* sınaqdan əvvəl ala biləcəyi qiyməti həm işarə, həm də modulca məlum olmayan dəyişən kəmiyyətə deyilir. Məsələn; n sayda geodezik ölçmənin müsbət işarəli səhvlərinin sayı; başqa bir misal kimi hər hansı bucağın ölçülmə səhvini göstərmək olar.

Təsadüfi kəmiyyətlər iki növ olur: *kəsilən* (*diskret*) və *kəsilməyən* (*fasiləsiz*). Ala biləcəyi mümkün qiymətləri əvvəlcədən göstərilə bilən təsadüfi kəmiyyətə kəsilən (diskret) təsadüfi kəmiyyət deyilir (məsələn, yuxarıda verilmiş birinci misal). Kəsilməyən təsadüfi kəmiyyət isə ala biləcəyi qiymətləri əvvəlcədən konkret olaraq göstərilə bilməyən, lakin mümkün qiymətləri müəyyən bir aralıq (interval) təşkil edən təsadüfi kəmiyyətə deyilir (ikinci misal).

Digər kəmiyyətlərdən fərqli olaraq təsadüfi kəmiyyətlərin hər bir mümkün qiymətinə onun baş vermə ehtimalı göstərilir. Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onların uyğun ehtimalları arasında əlaqəni ifadə edən münasibət təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu adlanır. Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunları üç formada ifadə edilə bilər: **1)** ***ədədi*****; 2)** ***qrafiki*****; 3)** ***analitik forma***. Mahiyyət etibarı ilə bunlar aşağıdakılardan ibarətdir.

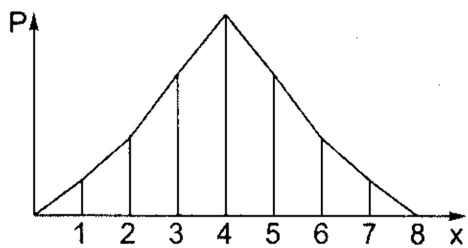
1. Paylanmanın ədədi forması sıra (cədvəl) şəklində göstərilir. Məsələn: $x_1, x_2,...,x_n$ qiymətləri alan X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırasını aşağıdakı cədvəl şəklində yazmaq olar.

x_i	$x_1, x_2,........x_n$
p_i	$p_1, p_2,........p_n$

(2.1)

Bu cədvəldə X-ın hər bir qiymətinə uyğun gələn p_i ehtimalı göstərilmişdir.

2. Təsadüfi kəmiyyətin qrafiki formada paylanma qanunu paylanma çoxbucaqlısı şəklində ifadə olunur. Bu məqsədlə düzbucaqlı koordinat sistemində cədvəl 2.1-də verilmiş x_i, p_i qiymətlərinə əsasən nöqtələr qurulur və öz aralarında düz xətt parçaları ilə birləşdirildikdən sonra paylanma çoxbucaqlısı alınır (şəkil 2.1).



Şəkil 2.1. Paylanma çoxbucaqlısı

Kəsilən təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları çox hallarda ədədi və qrafiki formalarda ifadə edilir.

3. Kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunlarını paylanma cədvəli və yaxud paylanma çoxbucaqlısı şəklində ifadə etmək mümkün deyil. Belə ki, kəsilməyən təsadüfi

kəmiyyətlər sonsuz qiymətlər çoxluğuna malikdir. Odur ki, kəsilməyyən təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları analitik formada, yəni paylanma funksiyası şəklində göstərilir. Prinsip etibarı ilə kəsilən kəmiyyətlər üçün də paylanma funksiyası yazmaq mümkündür.

Beləliklə, X təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş x qiymətindən kiçik qiymətlər alacağı ehtimalı *paylanma funksiyası* adlanır. Başqa sözlə desək, paylanma funksiyası ilə kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətin ehtimalı təyin edilir. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$F(x) = p(X < x). \tag{2.2}$$

$F(x)$ – həm də paylanmanın inteqral funksiyası adlanır. Bu funksiya aşağıdakı xassələrə malikdir.

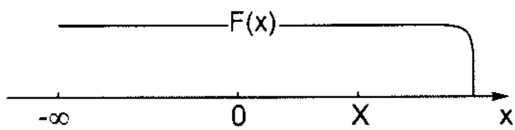
1) Funksiyanın qiymətlər çoxluğu [0; 1] intervalında yerləşir.

2) Azalmayan funksiyadır (əgər $x_2 \geq x_1$ olarsa, $F(x_1) \geq F(x_2)$);

3) $F(-\infty) = 0$.

4) $F(+\infty) = 1$.

Şəkil 2.2-də paylanma funksiyasının həndəsi interpretasiyası verilir.



Şəkil 2.2. Paylanma funksiyasının həndəsi interpretasiyası

Paylanma funksiyasının köməyi ilə təsadüfi kəmiyyətin verilmiş (a, b) intervalında yerləşmə ehtimalını hesablamaq mümkündür

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

§12. Paylanma sıxlığı

Bəzi hallarda kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu paylanma sıxlığı ilə ifadə etmək daha məqsədəuyğundur. Paylanma sıxlığı paylanma funksiyasının birinci dərəcəli törəməsindən ibarətdir, yəni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \varphi(x). \qquad (2.4)$$

Ədəbiyyatlarda $\varphi(x)$ funksiyası *diferensial paylanma qanunu* da adlanır. Xatırladaq ki, $F(x)$ inteqral paylanma qanunudur.

Paylanma sıxlığı funksiyası aşağıdakı xassələrə malikdir:

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi(x) \geq 0; \\ &2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

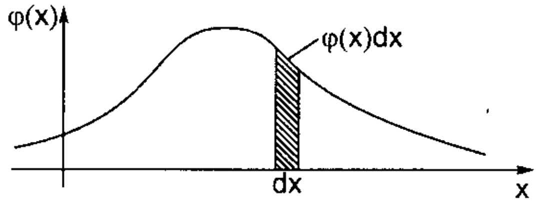
Əgər X təsadüfi kəmiyyətinin bütün mümkün qiymətlər çoxluğu (a, b) intervalında yerləşirsə, onda paylanma sıxlığının ikinci xassəsinə görə ((2.5) düsturu) $\int_a^b \varphi(x)dx = 1$ olar. Ümumi halda isə paylanma sıxlığından istifadə etməklə kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətin (a, b) intervalında yerləşmə ehtimalı aşağıdakı düsturla təyin edilir

$$P_a^b = \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (2.6)$$

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunauyğunluqlarını ifadə edən paylanma funksiyası $F(x)$ və paylanma sıxlığı $\varphi(x)$ arasında əlaqə belə yazılır:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx. \tag{2.7}$$

Şəkil 2.3-də paylanma sıxlığının həndəsi interpretasiyası verilir.



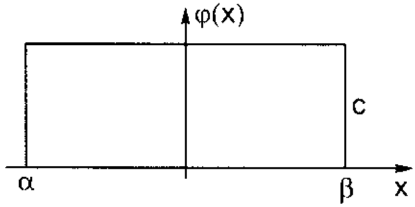
Şəkil 2.3. Paylanma sıxlığının həndəsi interpretasiyası

Misal 2.1. Fərz edək ki, təsadüfi X geodezik kəmiyyəti $\alpha < x < \beta$ intervalında sıxlığı $\varphi(X) = C$ olan paylanma qanununa tabedir (bərabər paylanma qanunu). Tələb olunur: a) C qiymətini α və β ilə ifadə edin; b) x kəmiyyətinin $\alpha_1 < x < \beta_1$ intervalına düşmə ehtimalını tapın; c) $F(x)$ funksiyasını təyin edin.

Həlli. Riyazi analizdən məlumdur ki, $\varphi(X) = C$ funksiyasının qrafiki X oxundan C məsafədə yuxarıda və ona paralel keçən düz xətdən ibarətdir (şəkil 2.4). Digər tərəfdən paylanma sıxlığının ikinci xassəsinə görə düzbucaqlının qrafikdə ayırdığı sahə vahidə bərabərdir, yəni $(\beta - \alpha)\cdot C = 1$. Buradan,

$$C = \frac{1}{\beta - \alpha}, \text{ eləcə də } \varphi(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

alarıq.



Şəkil 2.4. Bərabər paylanma qanunu

X kəmiyyətinin (α_1,β_1) intervalına düşmə ehtimalını hesablamaq üçün isə (2.6) düsturundan istifadə edək:

$$P_{\alpha_1}^{\beta_1}=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\varphi(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}C\cdot dx=C\int_{\alpha_1}^{\beta_1}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta_1-\alpha_1).$$

Nəhayət, (2.7) düsturuna əsasən paylanma funksiyasını təyin edirik:

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}\varphi(x)dx=\frac{X-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

§13. Təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının əsas parametrləri

Əvvəlki bölmələrdə göstərildiyi kimi, təsadüfi kəmiyyətin analitik paylanma qanunu paylanma funksiyası və ya paylanma sıxlığı ilə ifadə edilir. Bununla belə, bir çox hallarda təsadüfi kəmiyyətin öyrənilməsi üçün bütövlükdə onun paylanma qanununu deyil, yalnız bu paylanmanı səciyyələndirən əsas ədədi parametrləri bilmək kifayət edir.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının əsas ədədi parametrləri: *riyazi gözləmə, dispersiya, başlanğıc* və *mərkəzi momentlərdən* ibarətdir.

I. **Riyazi gözləmə** təsadüfi kəmiyyətin qiymətlər çoxluğunun paylanma mərkəzini göstərir. X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi $M[X]$ şəklində yazılır. Kəsilən (diskret) kəmiyyətlər üçün riyazi gözləmə

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,, \tag{2.8}$$

kəsilməyən (fasiləsiz) təsadüfi kəmiyyətlər üçün isə

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx \tag{2.9}$$

düsturları ilə hesablanır.

Ehtimal nəzəriyyəsində göstərilir ki, sınaqların (ölçmələrin) sayı (n) sonsuzluğa doğru artarsa, onda $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i Q_i$ hesabi orta qiyməti öz ehtimalı ilə riyazi gözləməyə yaxınlaşır, yəni

$$eht.\lim_{n\to\infty} \bar{x} = M[X]. \tag{2.10}$$

Burada Q – təsadüfi kəmiyyətin nisbi tezliyidir.

Riyazi gözləmə aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $\mathrm{M}[C] = C;$ (2.11)
2. $\mathrm{M}[C\,\mathrm{X}] = C \cdot \mathrm{M}[X];$ (2.12)
3. $\mathrm{M}[\sum C_i\,\mathrm{X}_i] = \sum C_i\,\mathrm{M}[X_i];$ (2.13)
4. $M[X_1 \cdot X_2; \cdots; X_n] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i]$ (2.14)
5. Riyazi gözləmə müsbət və ya mənfi işarəli ədəd ola bilər.

Qeyd: (2.14) düsturunda x_i kəmiyyətləri bir-birindən asılı olmayan kəmiyyətlərdir.

II. Dispersiya paylanma mərkəzinə nəzərən təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin səpələnmə dərəcəsini göstərir. X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası $D[X]$ şəklində yazılır. Ümumi şəkildə dispersiya aşağıdakı düsturla hesablanır

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]. \qquad (2.15)$$

Xüsusi halda kəsilən təsadüfi X kəmiyyəti üçün dispersiyanın qiyməti

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i, \qquad (2.16)$$

kəsilməyən təsadüfi kəmiyyət üçün isə

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 \varphi(x) dx \qquad (2.17)$$

ifadələrindən tapılır.

Dispersiyanın ölçü vahidi təsadüfi kəmiyyətin ölçü vahidinin kvadratına bərabərdir. Ona görə də, səpələnməni təsadüfi kəmiyyətin özü ilə müqayisə etmək üçün onunla eyni dərəcəli ölçü vahidinə gətirmək lazımdır. Bu məqsədlə orta kvadratik meyletmədən (o.k.m.)

$$\sigma = \sqrt{D} \qquad (2.18)$$

istifadə edilir (σ – standart da adlanır). Aydındır ki, σ həmişə yalnız müsbət işarəli qiymət alacaqdır.

Dispersiya aşağıdakı xassələrə malikdir:

1. $D[C]=0.$ (2.19)

2. $D[CX]=C^2 D[X].$ (2.20)

3. $D[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i]=\sum_{i=1}^{n} C_i^2 D[X_i]$ (2.21)

III. Momentlər təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasını səciyyələndirən daha ümumi ədədi parametrlərdir. Onlar iki formada: *başlanğıc* və *mərkəzi momentlər* şəklində təyin edilirlər.

X təsadüfi kəmiyyətinin S dərəcəli *başlanğıc momenti* həmin kəmiyyətin S üstlü (dərəcəli) qiymətindən götürülmüş riyazi gözləməyə deyilir. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$\alpha_s = M[X^S]. \tag{2.22}$$

Əgər (2.22) ifadəsində S=1 olarsa, onda $\alpha_1 = M$ [X]. Başqa sözlə desək, birinci dərəcəli başlanğıc moment elə riyazi gözləmə deməkdir.

Kəsilən kəmiyyətlər üçün başlanğıc moment

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s \cdot p_i , \tag{2.23}$$

kəsilməyən kəmiyyətlər üçün isə

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^S \varphi(x) dx \tag{2.24}$$

düsturları ilə hesablanır.

X təsadüfi kəmiyyətinin S dərəcəli *mərkəzi momenti* isə həmin təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən olan meylliyinin (meyletməsinin) S dərəcəli riyazi gözləməsinə deyilir. Riyazi dildə bu belə yazılır:

$$\mu_S = M[(X - M(X)^S] \tag{2.25}$$

Burada, $X^0 = (X - M[X])$ başqa adla mərkəzləşdirilmiş təsadüfi kəmiyyət adlanır.

Kəsilən təsadüfi kəmiyyətin mərkəzi momenti

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^s \cdot p_i , \tag{2.26}$$

kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətin mərkəzi momenti isə

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^s \varphi(x) dx \tag{2.27}$$

ifadələrindən tapılır.

Mərkəzi momentləri başlanğıc momentlərlə də ifadə etmək olar. Məsələn,

$$\begin{aligned} &\mu_1 = 0; \\ &\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = D. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Paylanmanı bəzi hallarda mərkəzi mütləq momentlərlə də təyin edirlər:

$$\gamma_S = M[|(X - M(X)^S|] \tag{2.29}$$

Mərkəzi mütləq momentlər içərisində birinci dərəcəli moment xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Onu *orta meyletmə* adlandırırlar. Orta meyletmə υ hərfi ilə işarə edilir.

Orta meyletmənin qiyməti kəsilən təsadüfi kəmiyyətlər üçün

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{n} |x_i - M[X]| \cdot p_i, \tag{2.30}$$

kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətlər üçün isə

$$\upsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M[X]| \varphi(x) dx \tag{2.31}$$

düsturu ilə hesablanır.

Təsadüfi kəmiyyətlərin paylanmasını səciyyələndirmək üçün yuxarıda göstərilən parametrlərlə yanaşı üçüncü və dördüncü dərəcəli mərkəzi momentlərdən də istifadə edilir. Üçüncü dərəcəli mərkəzi momentə əsasən tapılan parametr təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlərin riyazi gözləmə oxuna (paylanma mərkəzinə) nəzərən simmetrikliyini müəyyənləşdirir. Bu papametr *assimmetriya* adlanır və onun qiyməti aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{2.32}$$

burada μ_3 – üçüncü dərəcəli mərkəzi moment; σ isə standartdır. Simmetrik paylanma zamanı $S_k = 0$ qiyməti alır.

Şəkil 2.5-də iki asimmetrik paylanma əyrisi göstərilmişdir. Bunlardan birincisi müsbət $(S_k > 0)$, ikinci isə mənfi asimmet-